

Chapitre 24

Polynômes (partie C) et fractions rationnelles

Plan du chapitre

1	Factorisation de polynômes.	1
1.1	Polynômes irréductibles	1
1.2	Factorisation des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$	3
1.3	Polynôme scindé et forme factorisée	6
1.4	Factorisation des polynômes dans $\mathbb{R}[X]$	7
1.5	Calcul de PGCD et de PPCM par la factorisation	8
2	Relations coefficients-racines	9
3	Le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles	10
3.1	Construction de $\mathbb{K}(X)$	10
3.2	Le corps $\mathbb{K}(X)$	11
3.3	Fractions irréductibles et degré	12
4	Fonctions rationnelles.	13
5	Décomposition en éléments simples (DES)	14
5.1	DES partie 1 : calcul de la partie entière	15
5.2	DES : factorisation puis éléments simples (dans $\mathbb{C}$)	15
5.3	DES : factorisation puis éléments simples (dans $\mathbb{R}$)	16
5.4	Le déroulé de chaque étape.	18
6	Méthodes pour les exercices.	22

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Factorisation de polynômes

1.1 Polynômes irréductibles

Définition 24.1

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit qu'un polynôme B est un diviseur trivial de P si $B = \lambda$ ou $B = \lambda P$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Autrement dit, B est un diviseur trivial de P si B est associé à 1 ou B est associé à P .

Définition 24.2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est irréductible sur $\mathbb{K}$ si $\deg P \geq 1$ et si tous les diviseurs de P sont triviaux.

Remarque. Dire que P est irréductible revient à dire que toute tentative de factoriser P est vouée à l'échec ou à la trivialité : si on écrit $P = AB$, alors A ou B est constant non nul, et on a alors juste écrit $P = \lambda \times \left(\frac{1}{\lambda}P\right)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Trivial !

Exemple 1. $\circ$ $X^2 - 1$ n'est pas irréductible sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ car $X - 1$ est un diviseur non trivial de $X^2 - 1$, ce qui donne une factorisation non triviale $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$

$\circ$ $X^2 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}$ mais pas sur $\mathbb{C}$.

$\circ$ $X - 5$ est irréductible sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

Exemple 2. Soit P un polynôme de degré 1. Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{K}$.

Théorème 24.3 – Théorème de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. Admise en MPSI. □

On dit que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. En particulier, pour tout polynôme P non constant de $\mathbb{C}[X]$, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $X - \alpha \mid P$.

Théorème 24.4 – Polynômes irréductibles sur $\mathbb{K}$

- Les polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$ sont exactement les polynômes de degré 1.
- Les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ sont exactement les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

Démonstration. On ne fait la preuve que pour la première assertion. □

Remarque. Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ jouent un rôle similaire aux nombres premiers dans $\mathbb{N}$. De même que tout entier $n \geq 2$ se décompose de manière unique en produit de facteurs premiers, on va montrer dans les sections suivantes que :

Tout polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ peut se factoriser comme un produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{K}$.

1.2 Factorisation des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$

Lemme 24.5

Tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ peut s'écrire comme un produit (éventuellement vide) de polynômes de degré 1 de $\mathbb{C}[X]$.

Démonstration.

On raisonne par récurrence sur le degré. Pour montrer la propriété pour tout polynôme non nul, il suffit de montrer qu'elle est vraie pour tout polynôme de degré n avec $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose donc

H_n : « Tout polynôme de degré n s'écrit comme un produit de polynômes de degré 1 de $\mathbb{C}[X]$ ».

- Soit P un polynôme de degré $n = 0$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $P = \lambda$. Ainsi, on peut écrire $P = \lambda = \lambda \prod_{k=1}^n (\dots)$ avec $n = 0$. D'où H_0 est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose H_n . Montrons H_{n+1} . Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n + 1$.

D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, comme $\deg P \geq 1$, P admet une racine $\beta \in \mathbb{C}$. Donc $X - \beta$ divise P : il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X - \beta)Q$. On en déduit que $\deg Q = \deg P - 1 = n$. Par hypothèse de récurrence, Q s'écrit comme un produit de polynômes de degré 1. Par suite, P aussi. Finalement, H_{n+1} est vraie.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est vraie.

□

Par ce qui précède, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul, on peut écrire

$$P = (a_1X + b_1)(a_2X + b_2) \cdots (a_nX + b_n) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n \in \mathbb{N} & b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C} \\ a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}^* \end{cases}$$

Afin de réduire le nombre d'inconnus, on réécrit P différemment :

Sous cette forme, on reconnaît que :

- $\lambda = \text{cd}(P)$
- Les racines (non nécessairement distinctes) de P sont $\beta_1, \dots, \beta_n$.
- $n = \deg P$ (si $n = 0$, le produit est vide et on a bien $\deg P = 0$)

Cette écriture est utile, mais on peut la rendre encore plus précise en rassemblant les polynômes $X - \beta_k$ qui sont égaux : si on note $r \in \mathbb{N}$ le nombre de racines *distinctes* de P , qu'on note ces racines $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, alors

$$P = \lambda \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i}$$

avec (pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$) m_i le nombre de $\beta_1, \dots, \beta_n$ qui sont égaux à α_i , ce qui revient à dire que m_i est la multiplicité de α_i en tant que racine de P . On obtient donc le résultat suivant :

Théorème 24.6 – Polynômes irréductibles et factorisation sur $\mathbb{C}[X]$

Tout polynôme non nul P de $\mathbb{C}[X]$ peut s'écrire sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^r (X - \alpha_k)^{m_k} = \lambda (X - \alpha_1)^{m_1} (X - \alpha_2)^{m_2} \dots (X - \alpha_r)^{m_r} \quad (*)$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $r \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ les racines distinctes de P , et $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités respectives.

Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs. On dit que c'est la forme factorisée de P sur $\mathbb{C}[X]$.

Remarque. La relation (*) nous donne les racines distinctes de P et leurs multiplicités. Mais elle permet aussi de déduire que :

- λ est le coefficient dominant de P
- r est le nombre de racines distinctes de P (si $r = 0$, P est constant non nul)
- $\deg P = \dots\dots\dots$

Corollaire 24.7

Tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ admet autant de racines comptées avec multiplicité que son degré.

Méthode

Pour factoriser un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, on peut :

- Si $\deg P \leq 2$, calculer explicitement les racines avec les méthodes classiques.
- Chercher une racine évidente et factoriser.
- Résoudre l'équation $P(z) = 0$.

Lorsqu'on a trouvé autant de racines (comptées avec multiplicités) que le degré de P , on peut factoriser P avec la formule (*).

Exemple 3. Factoriser le polynôme $16X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exemple 4. Factoriser le polynôme $16X^4 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$. En déduire ses racines.

Exemple 5. Factoriser le polynôme $P = X^6 + (-2 + 2i)X^5 + (7 + 4i)X^4 + (2 - 4i)X^3$ dans $\mathbb{C}[X]$ sachant que i est racine évidente. En déduire ses racines et leurs multiplicités.

1.3 Polynôme scindé et forme factorisée

Définition 24.8

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est scindé (sur $\mathbb{K}$) s'il peut s'écrire sous la forme d'un produit (éventuellement vide) de polynômes de degré 1 de $\mathbb{K}[X]$, ou encore s'il s'écrit :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^r (X - \alpha_k)^{m_k}$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $r \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ les racines distinctes de P et $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités respectives.

On dit que P est scindé à racines simples (sur $\mathbb{K}$) si P est scindé sur $\mathbb{K}$ et si toutes les multiplicités de ces racines valent 1, i.e. $m_1 = \dots = m_r = 1$ dans la formule ci-dessus.

Théorème 24.9

Tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$ (mais pas nécessairement scindé à racines simples).

Démonstration. Cela découle trivialement du Théorème 24.6. □



Un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ n'est pas nécessairement scindé sur $\mathbb{R}$.

Exemple 6. ◦ Le polynôme $P = X^2 + 1$ est-il scindé sur $\mathbb{R}$?

◦ Le polynôme $P = 4X^2(X - 1)$ est scindé (sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$) mais pas scindé à racines simples car

Remarque. Lorsque P est scindé sur $\mathbb{R}$, il est en particulier scindé sur $\mathbb{C}$ et dans ce cas, on peut dire simplement que P est scindé (sans préciser qu'il l'est sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$). En revanche, si P est scindé sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$, il faut préciser que " P est scindé **sur** $\mathbb{C}$ " pour éviter toute ambiguïté.

Exemple 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}$ et en déduire qu'il est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$.

1.4 Factorisation des polynômes dans $\mathbb{R}[X]$

Théorème 24.10

Soit P un polynôme à coefficients réels. Si α est une racine complexe de $\mathbb{C}$, alors $\bar{\alpha}$ est aussi une racine de P , de même multiplicité que α .

Démonstration. Tout d'abord, pour tous $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, on affirme que $Q(\bar{\alpha}) = \overline{Q(\alpha)}$. En effet, si $Q = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, alors

$$\overline{Q(\alpha)} = \overline{\sum_{k=0}^n a_k \alpha^k} = \sum_{k=0}^n a_k \overline{\alpha^k} = \sum_{k=0}^n a_k \bar{\alpha}^k = Q(\bar{\alpha})$$

En conséquence, comme P et ses dérivées successives sont à coefficients réels, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \alpha \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité } m &\iff P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(m)}(\alpha) \neq 0 \\ &\iff \overline{P(\alpha)} = \overline{P'(\alpha)} = \dots = \overline{P^{(m-1)}(\alpha)} = 0 \text{ et } \overline{P^{(m)}(\alpha)} \neq 0 \\ &\iff P(\bar{\alpha}) = P'(\bar{\alpha}) = \dots = P^{(m-1)}(\bar{\alpha}) = 0 \text{ et } P^{(m)}(\bar{\alpha}) \neq 0 \\ &\iff \bar{\alpha} \text{ est une racine de } P \text{ de multiplicité } m. \end{aligned}$$

□

Théorème 24.11 – Polynômes irréductibles et factorisation sur $\mathbb{R}[X]$

Tout polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ peut s'écrire sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \prod_{j=1}^s Q_j^{n_j}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$ et :

- $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ les racines **réelles** distinctes de P , de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}^*$.
- $Q_1, \dots, Q_s \in \mathbb{R}[X]$ des polynômes unitaires distincts de degré 2 sans racine réelle ($\Delta < 0$) de “multiplicités” respectives $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N}^*$.

Cette écriture est unique à l'ordre des facteurs près.

Comme tous les polynômes des produits sont unitaires, λ est le coefficient dominant de P . Dans la factorisation ci-dessus, on peut avoir $r = 0$ ou $s = 0$ (dans ce cas le produit correspondant est vide et vaut 1). Si $r = s = 0$, alors P est constant non nul.

Démonstration. La preuve s'appuie sur la méthode ci-dessous : □

Méthode

Pour factoriser un polynôme sur $\mathbb{R}$, on peut le factoriser sur $\mathbb{C}$, puis regrouper les polynômes ayant des racines complexes conjuguées pour former des polynômes réels du second degré (sans racine réelle).

Exemple 8. Décomposer $X^5 + X$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

1.5 Calcul de PGCD et de PPCM par la factorisation

On a vu que calculer les décompositions (dites généralisées) de deux entiers a et b permet de calculer entre autres $a \wedge b$ et $a \vee b$. Il en va de même pour les polynômes :

Définition 24.12 – Factorisation “généralisée”

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ non nul. Soit $\mathbb{I}$ l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires sur $\mathbb{K}$. Alors on peut écrire :

$$A = \lambda \prod_{P \in \mathbb{I}} P^{\alpha_P}$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\alpha_P \in \mathbb{N}$ (notamment les exposants peuvent être nuls).

On parlera de factorisation “généralisée” de A . La notation $\mathbb{I}$ n'est pas du tout officielle ! Avec des polynômes unitaires, cette écriture est unique et on l'exposant α_P peut être vu comme la “valuation P -adique” du polynôme A . Mais c'est hors-programme.

Théorème 24.13

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non nuls, de factorisations généralisées :

$$A = \lambda \prod_{P \in \mathbb{I}} P^{\alpha_P} \quad B = \mu \prod_{P \in \mathbb{I}} P^{\beta_P}$$

Alors, on peut déduire le PGCD et le PPCM de A et B :

$$A \wedge B = \prod_{P \in \mathbb{I}} P^{\min(\alpha_P, \beta_P)} \quad \text{et} \quad A \vee B = \prod_{P \in \mathbb{I}} P^{\max(\alpha_P, \beta_P)}$$

Exemple 9. Si $A = 2X^2(X - 1)$ et $B = 3X(X - 1)^2(X + 1)$ alors

$$A \wedge B = \dots\dots\dots \quad \text{et} \quad A \vee B = \dots\dots\dots$$

On en déduit le résultat suivant, qui est très utile en pratique :

Théorème 24.14

Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$. $P \wedge Q = 1$ si et seulement si P et Q n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$.

Démonstration.

□

Pour appliquer ce résultat, il faut absolument regarder s'il y a une racine *complexe* commune : $P = (X^2 + 1)$ et $Q = (X^2 + 1)^2$ n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{R}$, mais on voit facilement que P et Q ne sont pas premiers entre eux (car $P \mid Q$). C'est cohérent avec la propriété ci-dessus, puisque P et Q ont au moins une racine commune dans $\mathbb{C}$ (plus précisément i et $-i$).

2 Relations coefficients-racines

Rappel : pour tous $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq 0$, pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont les deux racines de } aX^2 + bX + c \iff z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Pour un polynôme scindé, on peut généraliser ces relations entre coefficients et racines :

Théorème 24.15 – Relations coefficients-racines (ou formules de Viète)

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$, et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ les racines **complexes** de P (pas nécessairement distinctes). Alors :

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta_i \beta_j = \frac{a_{n-2}}{a_n} \quad \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \beta_i \beta_j \beta_k = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \quad (\dots) \quad \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$



Comme les $\beta_1, \dots, \beta_n$ ne sont pas forcément distincts, ces relations donnent la somme et le produit des racines *comptées autant de fois que leur multiplicité*.

Démonstration.

On ne prouve que la première et la dernière formule. Comme P est scindé, et que son coefficient dominant est a_n , on peut écrire

$$P = a_n(X - \beta_1)(X - \beta_2) \dots (X - \beta_n)$$

On remarque que $P(0) = a_n(-\beta_1)(-\beta_2) \dots (-\beta_n) = a_n(-1)^n \prod_{k=1}^n \beta_k$. Or, on a aussi $P(0) = a_0$. Ainsi, par identification,

$$\prod_{k=1}^n \beta_k = \frac{a_0}{(-1)^n a_n} = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Ensuite, le terme de degré $n-1$ de $a_n(X - \beta_1)(X - \beta_2) \dots (X - \beta_n)$ est :

$$a_n(-\beta_1)X^{n-1} + a_n(-\beta_2)X^{n-1} + \dots + a_n(-\beta_n)X^{n-1}$$

On en déduit que le coefficient de degré $n-1$ est $a_n(-\beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_n)$, mais celui de P est a_{n-1} . Par identification,

$$-a_n \sum_{k=1}^n \beta_k = a_{n-1} \quad \text{donc} \quad \sum_{k=1}^n \beta_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

□

Exemple 10. Soit $P = X^3 - 3X^2 + aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On note $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ les racines complexes de P , comptées avec multiplicité. On suppose que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 5$. En déduire a .

3 Le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles

3.1 Construction de $\mathbb{K}(X)$

Étant donnés deux polynômes A et B avec $B \neq 0$, on souhaite définir le quotient $\frac{A}{B}$. Si A est un multiple de B , i.e. $A = BQ$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$, on pourrait poser $\frac{A}{B} := Q$. Mais dans le cas général, A n'est pas un multiple de B et

il n'y a pas de moyen clair de définir cette fraction dans $\mathbb{K}[X]$. Il faut un ensemble "plus gros", qu'on va construire.

Comme les fractions d'entiers, si on veut définir un quotient $F = \frac{A}{B}$, on souhaite pouvoir "simplifier" par un même polynôme (non nul) au numérateur et au dénominateur. Cela entraîne qu'une même fraction admet plusieurs écritures possibles :

$$F = \frac{A}{B} = \frac{2A}{2B} = \frac{XA}{XB} = \frac{BA}{B^2}$$

Au final, cette propriété revient à ce que les fractions vérifient : $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC$.

Définition 24.16 – Fraction rationnelle

On admet l'existence d'un ensemble

$$\mathbb{K}(X) := \left\{ \frac{A}{B} \mid A, B \in \mathbb{K}[X] \text{ et } B \neq 0 \right\}$$

dont les éléments vérifient

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC$$

L'élément $\frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ est appelé une fraction rationnelle.

Exemple 11.

- $\frac{X}{X^2}$ et $\frac{2}{2X}$ sont deux fractions rationnelles égales : ce sont deux écritures de la fraction $F = \frac{1}{X}$.
- $\frac{1}{4}$ et $\frac{0}{X}$ sont des fractions rationnelles.

Remarque. Pour tout polynôme P , on peut identifier P et $\frac{P}{1}$: on dira (abusivement) que tout polynôme est une fraction rationnelle, ou encore que $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$.

- En particulier, on note $0 = \frac{0}{1}$ la fraction rationnelle nulle. Elle a de nombreuses écritures : $0 = \frac{0}{X} = \frac{0}{5X^2} \dots$
- On a $\frac{A}{B} = 0$ si et seulement si $A = 0$.

3.2 Le corps $\mathbb{K}(X)$

Définition 24.17

On définit deux l.c.i. $+$ et $\times$ sur $\mathbb{K}(X)$:

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} := \frac{AD + BC}{BD} \in \mathbb{K}(X)$$

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} := \frac{AC}{BD} \in \mathbb{K}(X)$$

- Puisque $B \neq 0$ et $D \neq 0$, alors $BD \neq 0$ (car $\mathbb{K}[X]$ est intègre). Les fractions ci-dessus sont donc bien des éléments de $\mathbb{K}(X)$.

- Si $F, F' \in \mathbb{K}(X)$, alors on peut vérifier que $F + F'$ et FF' ne dépendent pas des écritures de F et de F' . Les lois $+$ et $\times$ sont ainsi bien définies.

Théorème 24.18

$(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps.

Démonstration. Éléments de preuve :

1. On vérifie que $(\mathbb{K}(X), +)$ est un groupe abélien :
 - (a) $+$ est une l.c.i. associative et commutative sur $\mathbb{K}(X)$.
 - (b) L'élément neutre pour $+$ est la fraction nulle $F = 0$.
 - (c) L'opposé (i.e. symétrique pour $+$) de $\frac{A}{B}$ est la fraction $\frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}$, qu'on peut donc aussi noter $-\frac{A}{B}$.
2. On vérifie que $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps :
 - (a) $\times$ est une l.c.i. associative et commutative sur $\mathbb{K}(X)$, distributive sur $+$.
 - (b) L'élément neutre pour $\times$ est la fraction $F = 1$ (càd $\frac{1}{1}, \frac{X}{X}$, ou encore $\frac{B}{B}$ avec $B \neq 0$).
 - (c) Si $\frac{A}{B} \neq 0$, alors nécessairement $A \neq 0$ et on vérifie que $\frac{A}{B}$ admet pour inverse $\frac{B}{A} \in \mathbb{K}(X)$. Ainsi tout élément non nul de $\mathbb{K}(X)$ est inversible.

□

3.3 Fractions irréductibles et degré

Définition 24.19 – Fraction irréductible

Une fraction rationnelle est dite irréductible (ou sous forme irréductible) si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Remarque. Toute fraction $\frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ peut se réécrire sous forme irréductible en divisant numérateur et dénominateur par $A \wedge B$. En effet pour tout couple (A, B) , on a vu qu'il existe $(A_1, B_1) \in \mathbb{K}(X)$ telle que

$$A = (A \wedge B)A_1 \quad \text{et} \quad B = (A \wedge B)B_1 \quad \text{et} \quad A_1 \wedge B_1 = 1$$

Alors

$$\frac{A}{B} = \frac{(A \wedge B)A_1}{(A \wedge B)B_1} = \frac{A_1}{B_1}$$

et cette dernière fraction est bien irréductible.

Une fraction $\frac{A}{B}$ admet une infinité de formes irréductibles : si $\frac{A_1}{B_1}$ en est une, toutes les autres sont les fractions

Exemple 12. La fraction $\frac{X^3 - 1}{X^4 - 1}$ n'est pas irréductible car 1 est une racine commune à $X^3 - 1$ et $X^4 - 1$. De plus la factorisation en produits de polynômes irréductibles de $X^3 - 1$ et de $X^4 - 1$ donne :

On lit sur cette factorisation que $(X^3 - 1) \wedge (X^4 - 1) = X - 1$. Donc on peut se ramener à une fraction irréductible en simplifiant par le PGCD :

Définition – Degré

Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. On définit le degré de F par

$$\deg F := \deg A - \deg B \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$$

- Comme $\deg A \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ et $\deg B \in \mathbb{N}$ (car $B \neq 0$), on a bien $\deg F \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.
- Le degré de F ne dépend pas de son écriture : si on a $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, alors comme $AD = BC$ on a

$$\deg A + \deg D = \deg B + \deg C$$

et donc, comme $\deg B, \deg D$ sont finis :

$$\deg A - \deg B = \deg C - \deg D \implies \deg \left(\frac{A}{B} \right) = \deg \left(\frac{C}{D} \right)$$

Ainsi, on peut prendre n'importe quelle écriture pour calculer $\deg F$.

- Attention ! Si $\deg F = 0$, cela n'implique pas que F est égale à un élément $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Contre-exemple :
 $F = \frac{X+5}{2X-3}$.

Exemple 13. Le degré de $\frac{2X+1}{X^2}$ est ; Le degré de $\frac{(X-1)^2 - X^2}{X(1-X)}$ est

4 Fonctions rationnelles

Définition 24.20 – Racines et pôles

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ qui admet $\frac{A}{B}$ pour forme *irréductible*.

- On appelle racine de F toute racine de son numérateur. On définit la multiplicité de cette racine (en tant que racine de F) comme étant sa multiplicité en tant que racine du numérateur.
- On appelle pôle de F toute racine de son dénominateur. On définit la multiplicité de cette racine (en tant que pôle de F) comme étant sa multiplicité en tant que racine du dénominateur.

Exemple 14. Si $F = \frac{1}{(X - \alpha)^k}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors α est un pôle de F de multiplicité k .

Exemple 15. Attention à bien mettre F sous forme irréductible. Si $F = \frac{X^3 - 1}{X^2 - 1}$, alors 1 n'est ni racine, ni pôle de F . En effet, sous forme irréductible,

$$F = \frac{X^2 + X + 1}{X + 1}$$

si bien que F a pour unique pôle -1 , et F n'a pas de racine réelle. Cependant, F admet deux racines complexes : $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et j^2 .

Dans la définition qui suit, on note $\tilde{P}$ la fonction polynômiale associée à un polynôme P .

Définition 24.21 – Fonction rationnelle

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ qui admet $\frac{A}{B}$ pour forme **irréductible**. On appelle fonction rationnelle (associée à F) la fonction

$$\tilde{F} : x \mapsto \frac{\tilde{A}(x)}{\tilde{B}(x)}$$

La fonction $\tilde{F}$ est définie sur $\mathbb{K} \setminus \tilde{B}^{-1}(\{0\})$, i.e. sur $\mathbb{K}$ privé des racines de B (i.e. des pôles de F) et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- Les deux définitions précédentes ne dépendent pas du choix de la forme irréductible de F (si $F = \frac{\lambda A}{\lambda B}$ alors on trouve les mêmes racines, pôles et fonction rationnelle $\tilde{F}$).
- Cette définition de $\tilde{F}$ est compatible avec les opérations $+, \lambda \cdot, \times$ de $\mathbb{K}$ et de $\mathbb{K}(X)$:

$$\widetilde{F + G} = \tilde{F} + \tilde{G} \quad \widetilde{F \times G} = \tilde{F} \times \tilde{G} \quad \widetilde{\lambda F} = \lambda \tilde{F}$$

5 Décomposition en éléments simples (DES)

Pour intégrer l'expression $\frac{1}{1-x^2}$, on a vu la méthode suivante : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{\frac{1}{2}}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-x} \quad \text{donc} \quad \int_a^b \frac{1}{1-x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln|1+x| + \frac{1}{2} \ln|1-x| \right]_a^b$$

Le but de cette section (et du chapitre) est de donner une méthode pour décomposer une fraction rationnelle F de $\mathbb{K}(X)$ de la même façon, de sorte qu'on puisse l'étudier plus facilement car elle s'écrit comme une combinaison (linéaire) de fractions plus simples. Ce sera particulièrement utile pour réaliser des opérations linéaires : intégration, sommation, dérivation, etc.

Le calcul de la DES se fait en trois étapes : les étapes 2 et 3 varient selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

5.1 DES partie 1 : calcul de la partie entière

Définition 24.22 – Étape 1 : partie entière + fraction de degré négatif

Toute fraction rationnelle $\frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ peut se décomposer en :

$$\frac{A}{B} = E + \frac{R}{B}$$

avec

- $E \in \mathbb{K}[X]$ un *polynôme* appelé partie entière de $\frac{A}{B}$.
- $\frac{R}{B} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction de degré *strictement négatif* : $\deg\left(\frac{R}{B}\right) < 0$.

De plus le couple (E, R) associé à cette décomposition est unique.

Le couple (E, R) s'obtient en faisant la division euclidienne de A par B :

$$\begin{cases} A = BE + R \\ \deg R < \deg B \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{A}{B} = E + \frac{R}{B} \\ \deg\left(\frac{R}{B}\right) < 0 \end{cases}$$

A noter : si $\deg\left(\frac{A}{B}\right) < 0$, alors la partie entière de $\frac{A}{B}$ est nulle et $R = A$. Cette étape n'est alors pas nécessaire.

La suite du calcul de la DES est toujours la même : on factorise le polynôme B , et cette factorisation permet de décomposer $\frac{R}{B}$ en une somme de fractions plus simples, dont il faut déterminer les numérateurs.

5.2 DES : factorisation puis éléments simples (dans $\mathbb{C}$)

On suppose que $\frac{R}{B} \in \mathbb{C}(X)$.

Remarque (Étape 2.C : factorisation de B). Puisque le dénominateur B est un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$, il est scindé et on détermine la factorisation de B sous la forme suivante :

$$B = \mu \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i}$$

avec $\mu \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ les racines distinctes de B et $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités. On notera que le cas $n = 0$ correspond à $B = \mu$, i.e. B constant non nul.

Théorème 24.23 – Étape 3.C : DES sur $\mathbb{C}$

Soit $\frac{R}{B} \in \mathbb{C}(X)$ telle que $\deg\left(\frac{R}{B}\right) < 0$. Une fois B factorisé comme ci-dessus, il existe des éléments de $\mathbb{C}$ (un pour chaque $\cdot$ ci-dessous) telle que

$$\frac{R}{B} = \frac{\frac{1}{\mu}R}{\prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i}} = \sum_{i=1}^r \left(\frac{\cdot}{X - \alpha_i} + \frac{\cdot}{(X - \alpha_i)^2} + \dots + \frac{\cdot}{(X - \alpha_i)^{m_i}} \right)$$

Remarque. La forme générale de la décomposition ne dépend ni de R , ni de μ . En réalité, R et μ vont influencer les valeurs des coefficients qu'on va trouver. De plus, pour chaque racine α_i il y a donc un total de m_i coefficients à trouver. On doit donc trouver un total de $m_1 + m_2 + \dots + m_r$ coefficients, ou encore autant de coefficients que le degré de B .

Finalement, on a la décomposition suivante :

Définition 24.24 – Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. Alors F admet une décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$:

$$F = E + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{c_{ik}}{(X - \alpha_i)^k}$$

où $E \in \mathbb{C}[X]$ est la partie entière de F , $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les pôles distincts de F de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}^*$ et (c_{ik}) est une famille d'éléments de $\mathbb{C}$.

Cette décomposition est unique : il n'y a qu'une seule famille (c_{ik}) pour laquelle l'égalité est vérifiée.

Exemple 16. Donner la forme des DES suivantes (sans déterminer les complexes associés) :

$$\circ F = \frac{7}{5X^3(2X - 4i)} = \dots$$

$$\circ F = \frac{X^3 + iX^2}{(X - i)^2(X + 1)^2X} = \dots$$

Si $F = \frac{A}{1} \in \mathbb{K}[X]$, alors la décomposition en éléments simples de F est juste $F = F + 0$: la partie entière est $E = F$ et, puisque $B = 1$ est constant, on a $n = 0$, si bien que la somme double est nulle.

5.3 DES : factorisation puis éléments simples (dans $\mathbb{R}$)

On suppose que $\frac{R}{B} \in \mathbb{R}(X)$.

Remarque (Étape 2. $\mathbb{R}$: décomposition de B en produit de polynômes irréductibles). Puisque le dénominateur B est un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$, on détermine la factorisation de B sous la forme suivante :

$$B = \mu \left(\prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \right) \prod_{j=1}^s Q_j^{n_j}$$

avec $\mu \in \mathbb{R}^*$, $r, s \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ les racines réelles distinctes de B , $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités respectives, $Q_1, \dots, Q_s \in \mathbb{R}[X]$ des polynômes unitaires distincts de degré 2 sans racine réelle et $n_1, \dots, n_s$ leurs "multiplicités".

Théorème 24.25 – Étape 3. $\mathbb{R}$: éléments simples sur $\mathbb{R}$

Soit $\frac{R}{B} \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle irréductible telle que $\deg\left(\frac{R}{B}\right) < 0$. Une fois B factorisé comme ci-dessus, il existe des éléments de $\mathbb{R}$ (un pour chaque $\cdot$ ci-dessous) telles que

$$\frac{R}{B} = \frac{R}{\mu \left(\prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \right) \prod_{j=1}^s Q_j^{n_j}} = \sum_{i=1}^r \left(\frac{\cdot}{X - \alpha_i} + \frac{\cdot}{(X - \alpha_i)^2} + \dots + \frac{\cdot}{(X - \alpha_i)^{m_i}} \right) + \sum_{j=1}^s \left(\frac{\cdot X + \cdot}{Q_j} + \frac{\cdot X + \cdot}{Q_j^2} + \dots + \frac{\cdot X + \cdot}{Q_j^{n_j}} \right)$$

Remarque. Là encore, la forme générale de la décomposition ne dépend ni de R , ni de μ . Contrairement à la DES dans $\mathbb{C}$, il peut y avoir deux coefficients à trouver sur une même fraction. Cela arrive uniquement lorsqu'au dénominateur on trouve un polynôme de la forme Q^k avec Q un polynôme (unitaire) de degré 2 sans racine réelle. Pour chaque racine réelle α_i on doit trouver m_i coefficients tandis que pour chaque polynôme Q_j , il en faut $2n_j$. Il y a ainsi un total de $m_1 + m_2 + \dots + m_r + 2n_1 + \dots + 2n_s$ coefficients, ou encore autant de coefficients que le degré de B .

Finalement, on a la décomposition suivante :

Définition 24.26 – Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$. Alors F admet une décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$:

$$F = E + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{c_{ik}}{(X - \alpha_i)^k} + \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{n_j} \frac{a_{jk}X + b_{jk}}{(Q_j)^k}$$

où $E \in \mathbb{R}[X]$ est la partie entière de F , $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les pôles réels distincts de F de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}^*$, $Q_1, \dots, Q_s \in \mathbb{R}[X]$ les polynômes unitaires distincts de degré 2 sans racine réelle qui composent le dénominateur de F , et (c_{ik}) , (a_{jk}) et (b_{jk}) des familles de réels.

De plus cette décomposition est unique : il n'y a qu'une seule famille (c_{ik}) , une seule famille (a_{jk}) et une seule famille (b_{jk}) pour lesquelles l'égalité est vérifiée.

Exemple 17. Donner la forme des DES suivantes (sans déterminer les réels $\cdot$ associés) :

◦ $F = \frac{1}{(X^2 + 1)^2 X} = \dots$

◦ $F = \frac{X^3 + X^2 + X + 1}{(X^2 + 4)(X - 4)^2} = \dots$

5.4 Le déroulé de chaque étape

Méthode – Décomposition en éléments simples

Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction qu'on veut décomposer en éléments simples.

1. On fait la division euclidienne de A par B et on divise tout par B : on obtient :

$$\frac{A}{B} = E + \frac{R}{B} \quad \text{avec} \quad E \in \mathbb{K}[X], \quad \deg R < \deg B$$

On a ainsi déterminé la partie entière E . Dans la suite, on s'intéresse uniquement à $\frac{R}{B}$.

2. On factorise B en produit de polynômes irréductibles : la forme peut varier selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
3. Une fois B factorisé, on connaît la forme de la DES de F et on détermine les coefficients au numérateur (chaque $\cdot$ dans les propriétés plus haut) par diverses techniques, cf plus bas.

La décomposition en éléments simples de la fraction F est alors :

$$\frac{A}{B} = E + \left[\text{"décomposition de } \frac{R}{B} \text{ déterminée à l'étape 3"} \right]$$

Pour l'étape 3, tout se fait **au brouillon** : sur la copie, **on n'écrit que la décomposition finale**. Une fois la forme de la DES écrite au brouillon, on peut utiliser toute une ribambelle d'astuces et de techniques : les exemples et les exercices sont le meilleur moyen de les comprendre. Voici une liste non exhaustive :

Méthode – Déterminer les coefficients à l'étape 3

- **"Grande puissance"** : pour chaque pôle α_i de multiplicité m_i , multiplier par $(X - \alpha_i)^{m_i}$ puis remplacer X par α_i partout.
- **"Passage à la limite"** : multiplier par X et faire tendre X vers $+\infty$ pour en déduire une relation.
- **"Parité"** : si la fraction $G := \frac{R}{B}$ est paire, on peut comparer les décompositions de $G(-X)$ et de $G(X)$ et égaliser deux à deux les coefficients qui ont le même dénominateur. Idem si G est impaire en comparant $G(-X)$ et $-G(X)$.
- **"Évaluation"** : on peut évaluer toute l'expression en un point précis de $\mathbb{K}$ et en déduire une relation.
- **"Grande puissance, racine imaginaire"** : lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pour chaque terme $\frac{aX + b}{Q_j^{n_j}}$, on peut multiplier par $Q_j^{n_j}$ partout et prendre $X = \omega$ avec ω une racine complexe (inconnue) de Q . Il n'est pas nécessaire de calculer ω : on peut uniquement utiliser le fait que $Q(\omega) = 0$ pour s'en sortir.
- **"Pôle simple"** : si α est un pôle simple, i.e. $B = \mu(X - \alpha)Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$, le coefficient de $\frac{1}{X - \alpha}$ est égal à $\frac{R(\alpha)}{B'(\alpha)}$.¹

1. Ce coefficient est aussi égal à $\frac{R(\alpha)}{Q(\alpha)}$ par la méthode "Grande puissance", mais il arrive que $\frac{R(\alpha)}{B'(\alpha)}$ soit plus facile à calculer.

Démonstration. Prouvons la méthode “Pôle simple”. Si α est un pôle simple de la fraction, alors $B = (X - \alpha)Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$. Dans ce cas, $B' = Q + (X - \alpha)Q'$. On remarque alors que $B'(\alpha) = Q(\alpha)$. Ainsi, le coefficient à trouver pour $\frac{\cdot}{X - \alpha}$ vaut $\frac{R(\alpha)}{Q(\alpha)}$ mais aussi $\frac{R(\alpha)}{B'(\alpha)}$. □

Exemple 18. Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de

$$F = \frac{A}{B} := \frac{2X^7 + 2X^5 - 10X^3 + 6X + 16}{X^6 + X^4 - 5X^2 + 3}$$

(Étape 1) On remarque que $A = 2XB + 16$. Ainsi,

$$\frac{A}{B} = 2X + \frac{16}{B}$$

Comme $2X$ est un polynôme et que $\frac{16}{B}$ est de degré strictement négatif, on a terminé l'étape 1. La partie entière est $2X$ (on aurait aussi pu faire une division euclidienne classique). Dans la suite, on ne s'intéresse donc qu'à la fraction $\frac{16}{B}$.

(Étape 2) On factorise $B = X^6 + X^4 - 5X^2 + 3$ en produit de polynômes irréductibles.

(Étape 3) On cherche une décomposition de la fraction $G := \frac{16}{B}$. La forme générale est :

Bonus : argument de parité

- On aurait aussi pu utiliser un argument de parité : on remarque que $G(X) = G(-X)$ donc par unicité ces deux fractions ont nécessairement la même décomposition. Or,

$$\begin{aligned} G(-X) &= \frac{a}{-X-1} + \frac{b}{(-X-1)^2} + \frac{c}{-X+1} + \frac{d}{(-X+1)^2} + \frac{e(-X)+f}{(-X)^2+3} \\ &= \frac{-a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{-c}{X-1} + \frac{d}{(X-1)^2} + \frac{-eX+f}{X^2+3} \end{aligned}$$

tandis que

$$G(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2} + \frac{eX+f}{X^2+3}$$

Si on compare les deux écritures, on peut alors identifier les coefficients qui ont le même dénominateur :

$$\begin{cases} a = -c \\ b = d \\ c = -a \\ d = b \\ eX + f = e(-X) + f \end{cases} \quad \begin{cases} a + c = 0 \\ b = d \\ e = 0 \end{cases}$$

On obtient ainsi trois équations en un coup.

6 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour factoriser un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on peut :

- Trouver une racine évidente $\alpha \in \mathbb{K}$ et factoriser P par $X - \alpha$.
- Si $\deg P = 2$, utiliser le discriminant.
- Résoudre l'équation $P(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{K}$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, factoriser P dans $\mathbb{C}$ puis regrouper les polynômes ayant des racines complexes conjuguées.
- Si $\deg P = n$ et qu'on a trouvé n racines comptées avec multiplicité, en déduire la factorisation de P .

Méthode

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Pour calculer $A \wedge B$, on peut :

- Utiliser l'algorithme d'Euclide.
- Si on pense que $A \wedge B = 1$, utiliser toutes les méthodes du chapitre précédent.
- Factoriser A et B en produit de polynômes irréductibles et en déduire $A \wedge B$ (et aussi $A \vee B$).

Une fois $A \wedge B$ calculé, on peut déduire $A \vee B$ par la propriété bien connue (cf section PPCM du chapitre précédent).

Méthode

Pour calculer une DES, se référer à aux méthodes et à l'exemple de la section précédente.